Разработано по заказу Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки.
Утверждено ФУМО по УГСН 01.00.00 «Математика и механика».

Демонстрационный вариант оценочного средства по дисциплине

«Аналитическая геометрия»

Инструкция для студентов

Общее время выполнения заданий ***80*** *минут.*

Оценочное средство включает 3 задания. Тип заданий – со свободно конструируемым ответом (СКО). Задание данного типа предполагает составление развернутых ответов, произвольных по содержанию и форме представления и включающих полное решение задачи (описание проблемы) с пояснениями.

1. Аффинная система координат и прямоугольная система координат на плоскости и в трехмерном пространстве. Координаты точек и формулы преобразования координат точек, геометрический смысл матрицы перехода.

2. Аффинные свойства плоскостей: взаимное расположение плоскостей, заданных точкой и парой неколлинеарных векторов.

3. На плоскости относительно прямоугольной системы координат даны два эллипса $x^2/4 + y^2/25 = 1$ и $x^2 + y^2 = 1$. а) Записать формулы аффинного преобразования, переводящего первый эллипс во второй. б) Можно ли перевести первый или второй эллипс аффинным преобразованием в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ и почему? в) Можно ли выполнить задания п. а) и п. б) движением и почему?

Эталон ответов на Демонстрационный вариант оценочного средства по дисциплине «Аналитическая геометрия»

1. Аффинная система координат и прямоугольная система координат на плоскости и в трехмерном пространстве. Координаты точек и формулы преобразования координат точек, геометрический смысл матрицы перехода.

1. Рассмотрим плоскость или трехмерное пространство.

Определения. Аффинной системой координат на плоскости называется совокупность $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, состоящая из любой точки *O* плоскости и любой пары неколлинеарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ этой плоскости (т.е. точки *O* и базиса $\vec{e}_1\vec{e}_2$).

Аффинной системой координат в трехмерном пространстве называется совокупность $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, состоящая из любой точки *O* пространства и любой тройки некомпланарных векторов $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ этого пространства (т.е. точки *O* и базиса $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$).

Пусть *M* – любая точка плоскости или трехмерного пространства. Пусть $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ - любые системы координат на прямой, плоскости или в трехмерном пространстве соответственно.

Определения. Радиус-вектором точки M относительно системы координат называется вектор $\overrightarrow{OM}$. *Координатами точки M* плоскости *относительно системы координат* $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ относительно базиса $\vec{e}_1\vec{e}_2$. *Координатами точки M* трехмерного пространства *относительно системы координат* $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ относительно базиса $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

На рисунках 1, 2 показано, как определять координаты точки *M*.

Для плоскости: разложим радиус-вектор точки *M* по базису $\vec{e}_1\vec{e}_2$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет в базисе $\vec{e}_1\vec{e}_2$ координаты $\{x; y\}$, а точка *M* имеет в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ координаты $(x; y)$.

Для трехмерного пространства: разложим радиус-вектор точки *M* по базису $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет в базисе $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ координаты

$\{x;y;z\}$, а точка M имеет в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ координаты $(x;y;z)$.

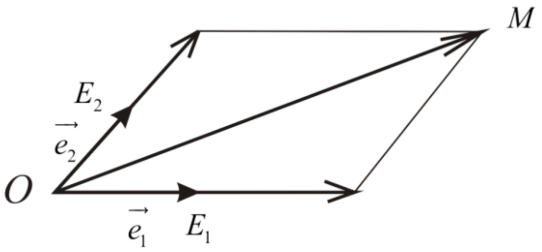

Рис.1.

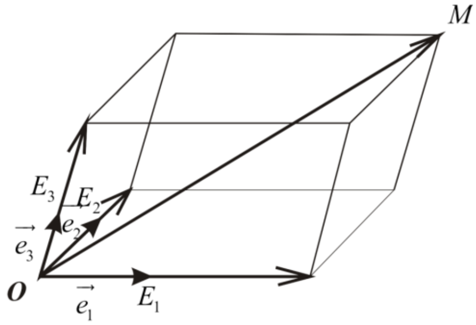

Рис. 2.

Утверждение (о свойствах координат точек). Координаты любой точки аффинного пространства относительно выбранной системы координат определены однозначно.

Доказательство следует из свойства единственности координат вектора относительно выбранного базиса.

Прямоугольной (декартовой) системой координат на плоскости называется совокупность $O\vec{i}\vec{j}$, состоящая из любой точки O плоскости и любой пары единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}$ этой плоскости, перпендикулярных друг другу (т.е. совокупность $O\vec{i}\vec{j}$, состоящая из любой точки O O и любого ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}$ плоскости).

Прямоугольной (декартовой) системой координат в трехмерном пространстве называется совокупность $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, состоящая из любой точки O пространства и любой тройки единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ этого пространства, перпендикулярных друг другу (т.е. совокупность $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, состоящая из любой точки O O и любого ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ пространства).

2. Выведем формулы преобразования координат точек для трехмерного пространства. Пусть M - произвольная точка, а $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ - две произвольные системы координат. Тогда радиус-векторы точки M

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \text{ для некоторых } x,y,z \in \Re, \text{ и}$$

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}\,'_1 + y'\vec{e}\,'_2 + z'\vec{e}\,'_3 \text{ для некоторых } x',y',z' \in \Re.$$

Это означает, что вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет координаты $\{x, y, z\}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, а вектор $\overrightarrow{O'M}$ и координаты $\{x', y', z'\}$ относительно базиса $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$.

Следовательно, точка M имеет координаты (x, y, z) относительно системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и координаты (x', y', z') относительно системы координат $O'\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2\vec{e}\,'_3$

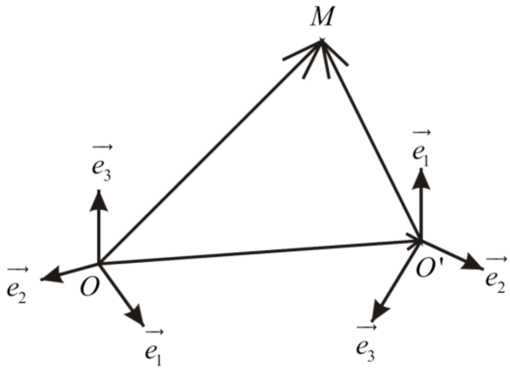

Рис.3.

Найдем связь между различными координатами одной и той же точки M в различных системах координат. Формулы, описывающие эту связь, называются *формулами преобразования координат точек*.

Чтобы выявить эту связь, необходимо знать, как одна из систем координат задается относительно другой. Пусть, например, известны координаты векторов $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{e}\,'_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}\,'_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}\,'_3 = c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3,$$

и точки O' относительно $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$:

$$\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3$$

Тогда для вектора $\overrightarrow{OM}$ имеем: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}.$$

Имеем

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}\,'_1 + y'\vec{e}\,'_2 + z'\vec{e}\,'_3 =$$
$$= x'(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3) + y'(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3) + z'(c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3) =$$

$$= (x'c_{11} + y'c_{12} + z'c_{13})\vec{e}_1 + (x'c_{21} + y'c_{22} + z'c_{23})\vec{e}_2 + (x'c_{31} + y'c_{32} + z'c_{33})\vec{e}_3 =$$
$$= (c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z')\vec{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z')\vec{e}_2 + (c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z')\vec{e}_3.$$

С другой стороны, для вектора $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$ имеем:

$$\overrightarrow{O'M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 - (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3) =$$
$$= (x - x_0)\vec{e}_1 + (y - y_0)\vec{e}_2 + (z - z_0)\vec{e}_3.$$

В силу единственности разложения вектора по базису получим

$$\begin{cases} x - x_0 = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' \\ y - y_0 = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' \\ z - z_0 = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0 \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0 \end{cases}.$$

Полученные формулы и называются *формулами преобразования координат точек* при замене системы координат.

Формулы преобразования координат точек можно записать короткой матричной формулой $X = CX' + X_0$. Матрица C является *матрицей перехода от базиса* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ***к базису*** $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$. По столбцам матрицы C стоят координаты базисных векторов $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема (о связи координат точки относительно различных систем координат). Пусть в трехмерном пространстве точка М имеет координаты (x, y, z) и (x', y', z') относительно аффинных систем координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$ соответственно.

Пусть точка O' имеет координаты (x_0, y_0, z_0) относительно системы координат $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'\vec{e}_3'$, а векторы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ имеют координаты $\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}$, $\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}$, $\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ соответственно.

Тогда

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0 \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0 \end{cases}.$$

Следствие 1. Пусть на плоскости точка М имеет координаты (x, y) и (x', y') относительно аффинных систем координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ соответственно.

Пусть точка O' имеет координаты (x_0, y_0) относительно системы координат $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$, а векторы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ имеют координаты $\{a,b\}$, $\{c,d\}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ соответственно.

Тогда

$$\begin{cases} x = ax' + cy' + x_0 \\ y = bx' + dy' + y_0 \end{cases}.$$

2. Аффинные свойства плоскостей: взаимное расположение плоскостей, заданных точкой и парой неколлинеарных векторов

Пусть π_1 и π_2 - две плоскости в трехмерном пространстве.

Пусть M_1 и M_2 - точки, а $\overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{m_2}$ и $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ - пары неколлинеарных векторов плоскостей π_1 и π_2 соответственно.

Определим взаимное расположение плоскостей π_1 и π_2.

Приведем один из алгоритмов решения этой задачи.

Шаг 1.

Выясним, компланарны или нет векторы $\overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{m_2}$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$.

Если не компланарны, то плоскости пересекаются.

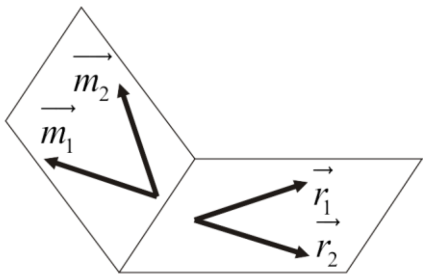

Рис. 6.

Если компланарны, то перейдем к следующему шагу.

Шаг 2.

Выясним, компланарны или нет векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{m_2}$ (или $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$).

Если не компланарны, то плоскости параллельны.

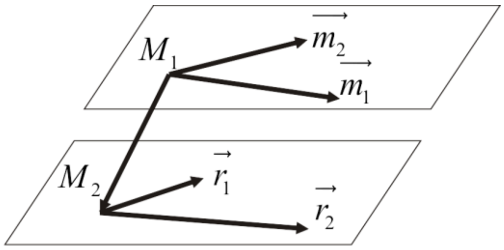

Рис. 7.

Если компланарны, то плоскости совпадают.

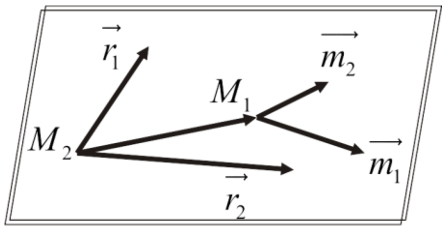

Рис.8.

Напомним, что три вектора в трехмерном пространстве компланарны тогда и только тогда, когда определитель из их координат равен нулю.

Замечание. На шаге 1 достаточно проверить компланарность двух троек векторов $\overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{m_2}$, $\vec{r_1}$ и $\overrightarrow{m_1}$, $\overrightarrow{m_2}$, $\vec{r_2}$.

3. На плоскости относительно прямоугольной системы координат даны два эллипса $x^2/4 + y^2/25 = 1$ и $x^2 + y^2 = 1$. а) Записать формулы аффинного преобразования, переводящего первый эллипс во второй. б) Можно ли перевести первый или второй эллипс аффинным преобразованием в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ и почему? в) Можно ли выполнить задания п. а) и п. б) движением и почему?

Решение.

а) Перепишем уравнение первого эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ в виде $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2=1$.

Рассмотрим аффинное преобразование $\begin{cases} x'=\dfrac{x}{2} \\ y'=\dfrac{y}{5} \end{cases}$

Оно переводит первый эллипс в эллипс с уравнением $x^2+y^2=1$ (единичную окружность). Штрихи над координатами x и y показывают, что образом является единичная окружность. После того как уравнение образа получено, то штрихи можно не писать.

б) Невозможно перевести аффинным преобразованием эллипс в гиперболу, так как эти фигуры имеют различные инвариантные свойства. В частности, эллипс является ограниченной фигурой, а гипербола – неограниченной. Эллипс не имеет асимптот, а гипербола имеет.

в) Невозможно, так как эллипсы имеют различные канонические параметры, отвечающие за размеры эллипсов. А при движениях расстояния должны сохраняться.